Université Hassan II

Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales de Mohammedia

Année Universitaire 2009/2010

MATHEMATIQUES II

Professeurs :

T. BENKARAACHE
&
M.REDOUABY

Chapitre I

Les Suites numériques

Les Suites numériques

les suites numériques sont des fonctions particulières. Définies sur IN, elles ont des propriétés spécifiques qui s'adaptent à l'étude des phénomènes économiques

Évolution
- ↗ **Continu** ➡ *fonction numérique* (notée $y = f(x)$) $(x \in IR)$
- ↘ **Discrète** ➡ *suite numérique* (notée $y = u_n$) $(n \in IN)$

- fonction numérique (à une variable) :

$$f: \quad IR \rightarrow IR$$
$$x \rightarrow f(x)$$

- Suite numérique (unidimensionnelle):

$$u: \quad IN \rightarrow IR$$
$$n \rightarrow u_n$$

Ainsi, toutes les propriétés générales concernant les fonctions numériques s'appliquent aux suites. Seules les notations vont changer.

Par exemple :

« La suite (u_n) est croissante » signifie :

$$\forall p \in IN \; ; \; \forall q \in IN$$
$$p \geq q \Rightarrow u_p \geq u_q$$

Par contre, même si la suite est donnée sous forme : $u_n = f(n)$, la dérivation n'a ici aucun sens pour étudier les variations

Exemple : $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{(2x+3)^2}$

La fonction dérivée a un sens

- Soit (u_n) la suite donnée par : $u_n=f(n)$

c'est-à-dire : $u_n=\dfrac{n+1}{2n+3}$

Attention ➡ u'_n n'a pas de sens

Une suite (u_n) peut être donnée :

- Soit explicitement : $u_n = f(n)$. On sait calculer u_n directement à partir de n

Exemple : $u_n=f(n)$ avec $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

Nous avons alors : $u_n=\dfrac{1}{n^2-1}$ définie pour $n\geq 2$

par exemple : $u_{100}=1/9999$

➢ Soit par récurrence : u_1 est connu et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ permet de calculer le terme de rang n+1 en fonction du terme précédent de rang n

Exemple : $u_1=3$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

avec $f(x)=\sqrt{1+x}$

Nous avons alors : $u_2=\sqrt{1+u_1}=2$;

$u_3=\sqrt{1+u_2}=\sqrt{3}$; $u_4=\sqrt{1+u_3}=\sqrt{1+\sqrt{3}}$; etc.

Remarque

Les suites que l'on rencontre le plus fréquemment en mathématiques financières sont les suites arithmétiques et les suites géométriques. Nous en rappellerons ici les propriétés les plus importantes.

A. Les suites arithmétiques

- On appelle suite arithmétique une suite donnée par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_1 \end{cases}$$

r est une constante donnée qu'on appelle « raison de la suite » et **u_1** son premier terme

Remarque

On peut écrire la relation de récurrence d'une suite arithmétique de la manière suivante :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = x + r$$

- Rappel -
Propriétés des suites arithmétiques

1) $u_n = u_1 + (n-1)r$;

2) $u_n = u_p + (n-p)r$; pour deux rang n et p quelconques

Propriétés des suites arithmétiques

3) $\sum_{p=1}^{p=n} u_p = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n\frac{(u_1 + u_n)}{2}$;

« somme des **n** premiers termes en fonction du premier et du dernier termes»

et de façon générale :

4) $\sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n-p+1)\frac{(u_p + u_n)}{2}$

Remarque

Une autre formulation de la propriété 3):

5) $\sum_{p=1}^{p=n} u_p = u_1 + u_2 + ... + u_n = nu_1 + r\frac{(n-1)n}{2}$;

« somme des **n** premiers termes en fonction du premier terme et de la raison »

Exemple

On considère la suite donnée par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3 \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme 2

Exemple

- Calculons, par exemple, les termes u_{32} et u_{124} :
  - $u_{32}=u_1+(32-1)r=2+31\times3=95$ «propriété1»
  - $u_{124}=u_1+(124-1)r=2+123\times3=371$ «propriété1»

  ou
  - $u_{124}=u_{32}+(124-32)r=95+92\times3=371$

    «propriété2»

Exemple

- Calculons les sommes suivantes :

$$u_1+u_2+...+u_{27} \quad \text{et} \quad u_{13}+u_{14}+...+u_{42}$$

- $u_1+u_2+...+u_{27}=27\dfrac{(u_1+u_{27})}{2}$ «propriété3»

  avec : $u_{27}=u_1+26r=2+78=80$, donc :

$$u_1+u_2+...+u_{27}=27\times(2+80)/2=27\times41=1107$$

Exemple

Ou, en utilisant la propriété 5 :

- $u_1+u_2+...+u_{27}=27u_1+\frac{(27-1)27}{2}r$

On obtient :

$$u_1+u_2+...+u_{27}=27\times2+351\times3=1107$$

Exemple

- Pour la 2ème somme, on utilise la propriété 4 :

$$u_{13}+u_{14}+...+u_{42}=(42-13+1)\frac{(u_{13}+u_{42})}{2}$$

avec :

$$u_{13}=u_1+12r=38 \quad \text{et} \quad u_{42}=u_1+41r=125$$

On obtient : $u_{13}+u_{14}+...+u_{42}=2445$

B. Les suites géométriques

- On appelle suite géométrique de raison **k**, une suite définie par sa relation de récurrence et par son premier terme :

$$\boxed{\begin{cases} u_{n+1} = k u_n \\ u_1 \end{cases}} \quad \text{avec } k \neq 1$$

Remarque

On peut écrire la relation de récurrence d'une suite géométrique de la manière suivante :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec } f(x) = kx$$

k est une constante réelle

Rappelons les principales propriétés des suites géométriques

1) $u_n = k^{n-1} u_1$;

2) $u_n = k^{n-p} u_p$; pour deux rang n et p quelconques

Propriétés des suites géométriques

3) $\sum_{p=1}^{p=n} u_p = u_1 + u_2 + ... + u_n = (\frac{k^n - 1}{k - 1}) u_1$;

« somme des **n** premiers termes en fonction de la raison **k** et du premier terme u_1 »

Remarque

Ceci est une conséquence directe de la formule « très importante » suivante :

$\forall x \in IR\ ;\ x \neq 1$, on a :

$$1+x+x^2+\ldots+x^m = \frac{x^{m+1}-1}{x-1}$$

(**m** est un entier ≥ 2)

Preuve

En effet : $\forall x \in IR$, on a :

$$(1+x+x^2+\ldots+x^m)(x-1)$$

$$=(x+x^2+\ldots+x^m+x^{m+1})-(1+x+x^2+\ldots+x^m)$$

$$=x^{m+1}-1\ ,$$

On divise par le terme $x-1$ $(x \neq 1)$

et on obtient : $1+x+x^2+\ldots+x^m = \dfrac{x^{m+1}-1}{x-1}$

Preuve de la propriété 3

- D'après la propriété 1 :

$$\begin{aligned} u_1+u_2+\ldots+u_n &= u_1+ku_1+k^2u_1+\ldots+k^{n-1}u_1 \\ &= (1+k+k^2+\ldots+k^{n-1})u_1 \\ &= \left(\frac{k^n-1}{k-1}\right)u_1 \end{aligned}$$

CQFD

De façon générale

4) $\sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n = \left(\frac{k^{n-p+1}-1}{k-1}\right)u_p$

- En effet :

$$\begin{aligned} u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\ldots+u_n &= u_p+ku_p+k^2u_p+\ldots+k^{n-p}u_p \\ &= (1+k+k^2+\ldots+k^{n-p})u_p \\ &= \left(\frac{k^{n-p+1}-1}{k-1}\right)u_p \end{aligned}$$

CQFD

Exemple

On considère la suite donnée par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison k=3 et de premier terme 2

Exemple

- Calculons les termes u_3 et u_5 :
  - $u_3 = 3^2 u_1 = 9 \times 2 = 18$ «propriété1»
  - $u_5 = 3^4 u_1 = 81 \times 2 = 162$ «propriété1»

ou

  - $u_5 = 3^2 u_3 = 9 \times 18 = 162$ «propriété2»

Exemple

- Calculons les sommes suivantes :

$$u_1+\ldots+u_4 \quad \text{et} \quad u_3+\ldots+u_7$$

- $u_1+\ldots+u_4=\left(\frac{3^4-1}{3-1}\right)u_1=40\times 2=80$ «propriété3»
- $u_3+\ldots+u_7=\left(\frac{3^5-1}{3-1}\right)u_3=121\times 18=2178$ «propriété4»

$$(\ u_3=3^2u_1=18\ )$$

Chapitre I : Suites numériques

EXERCICES CORRIGES

Chapitre 2 : INTERETS

1. Introduction

Les termes courants dans le domaine des affaires

Les termes courants dans le domaine des affaires

Notion d'intérêt

L'intérêt est le loyer de l'argent. Il peut être une dépense ou un revenu :

- Il s'agit d'une dépense pour l'emprunteur
- Il s'git d'un revenu pour le prêteur

Les termes courants dans le domaine des affaires

Autres définitions possibles :

- L'intérêt est la rémunération d'un prêt d'argent effectué par un agent économique (le prêteur) à un autre agent économique (l'emprunteur)
- Lorsqu'une personne (physique ou morale) emprunte de l'argent à une autre, elle achète cet emprunt. L'intérêt est le coût de cet emprunt.

Exemples

1. Vous empruntez de l'argent à la banque. Vous êtes l'emprunteur, le banquier est le prêteur. Votre emprunt vous coûte

2. Vous placez de l'argent sur un compte bancaire. Vous êtes le prêteur, la banque est l'emprunteur. Votre placement vous rapporte (et coûte à la banque)

Les termes courants
dans le domaine des affaires

Taux d'intérêt « annuel »

On appelle, taux d'intérêt annuel, l'intérêt produit par un capital de 1 DH placé pendant 1 an

- Habituellement, le taux d'intérêt est donné pour une unité de capital de 100 DH

Exemple

- Si après avoir placé 1 DH pendant 1 an, on récupère 1,12 DH, l'intérêt est 0,12 DH

On dit alors que le taux d'intérêt est de 0,12 ou encore 12%

Les termes courants
dans le domaine des affaires

Variation du taux d'intérêt

Le taux d'intérêt est variable selon les circonstances, il tient compte de :

- La loi de l'offre et de la demande : s'il y a beaucoup d'offres et peu de demandes de capitaux, le taux d'intérêt tendra à baisser. S'il y a beaucoup de demandes de capitaux et peu d'offres, le taux d'intérêt tendra à s'élever

- Le montant du prêt
- La durée du prêt
- Le degré de confiance que le prêteur accorde à l'emprunteur : plus l'emprunteur a de garanties plus il a de chances d'obtenir l'emprunt à moindre coût
- L'inflation : l'inflation fait augmenter le taux d'intérêt, et par conséquent le montant global de l'intérêt

Les termes courants dans le domaine des affaires

Les systèmes d'intérêt

On distingue :

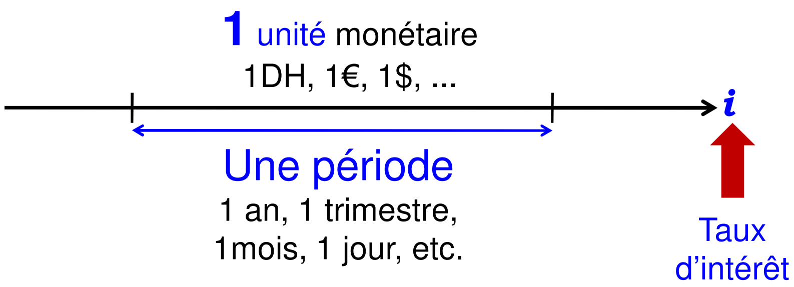
- Le système des intérêts simples : généralement utilisé pour les placements à court terme (moins d'un an)
- Le système des intérêts composés : généralement utilisé pour les placements à long terme (plus d'un an)

Chapitre 2 : INTERETS

2. *Calcul d'intérêts*

2. Calcul d'intérêts

- Le taux d'intérêt <u>par période</u> (noté **i**) est l'intérêt rapporté par <u>une unité</u> monétaire pendant <u>une période</u> :



Calcul d'intérêts : *point de départ…*

- Quel est l'intérêt **I** produit par un capital C placé pendant une période au taux d'intérêt **i** ?

1 unité monétaire $\longrightarrow$ ***i***

C $\longrightarrow$ **I** = ?
capital

- L'intérêt **I** produit par **C** pendant une période est donné par : $I = C \times i$

Calcul d'intérêts

- L'emprunteur aura donc à rembourser (après une période) :

$$C+I=C+C\times i=C(1+i)$$

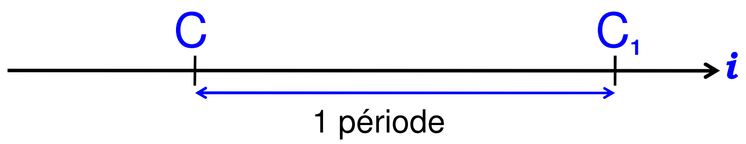
A retenir

- *L'intérêt* ***I*** *produit par* ***C*** *pendant une période est donné par :*

$$I=C\times i$$

- *La somme à rembourser après une période est :*

$$C_1=C(1+i)$$



Exemple 1

Pour payer la caution de votre appartement, votre banquier vous prête 8000 DH pour un an au taux annuel de 5,6%

On a : $C = 8000$ et $i = 0.056$

L'intérêt en DH produit par 8000DH à 5, 6% annuel pendant un an est :

$$8000 \times 0,056 = 448 \text{ DH}$$

Exemple 1

- La somme que vous devrez rembourser après un an est donc :

$$8000 \times (1 + 0.056) = 8448 \text{ DH}$$

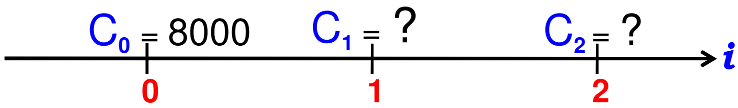
- Votre emprunt vous aura coûté 448 DH

Exemple 2

Pour payer la caution de votre appartement, votre banquier vous prête 8000 DH pour deux ans au taux annuel de 5, 6%

- Comment calculer l'intérêt ?

2 ans = 2 périodes



Première méthode

- On a vu dans l'exemple 1 que l'intérêt dû après un an est de 448 DH
- L'intérêt produit par les 8000 DH pendant la deuxième année est encore de 448 DH donc, à la fin de la deuxième année, vous remboursez :

8000 + 448 + 448 = 8896 DH

Au total, votre emprunt vous a coûté 896 DH

Deuxième méthode

- L'intérêt dû après un an est de 448 DH

Vous ne payez pas ces 448 DH

et tout se passe comme si, à la fin de la première année, il vous restait à rembourser 8448 DH.

- L'intérêt produit par ces 8448 DH pendant la seconde année est :

$$8448 \times 0.056 = 473,09$$

Deuxième méthode

- A la fin de la seconde année, vous devez rembourser :

$$8448 + 473,09 = 8921,09 \text{ DH}$$

- Votre emprunt était de 8000 DH, vous remboursez 8921,09 DH donc cet emprunt vous a coûté au total : 921,09 DH

2. Calcul d'intérêts

a) Intérêts Simples

a) Intérêts Simples

Définition

Dans le cas de l'intérêt simple, le capital reste invariable pendant toute la durée du prêt. L'emprunteur doit verser, à la fin de chaque période, l'intérêt dû

a) Intérêts Simples

Autre définition possible

Un capital est placé à intérêts simples si c'est le capital de départ qui produit l'intérêt pendant toute la durée du placement

Exemple

1. Soit un capital de 15 000 DH placé à intérêt simples pendant 2 années à un taux annuel de 13%. Calculons les intérêts (en DH):

   - Pour la 1ère année :

$$15000 \times 0{,}13 = 1950$$

« somme calculée à la fin de la 1ère année »

Exemple

- Pour la 2ème année :

$$15000 \times 0{,}13 = 1950$$

« somme calculée à la fin de la 2ème année »

Soit un total d'intérêt de 1950 + 1950 = 3900 DH

- On aurait pu calculer directement cette somme :

$$15000 \times 0{,}13 \times 2 = 3900$$

A retenir

Dans le système des Intérêts simples :

- Les intérêts sont versés à la fin de chacune des périodes de prêt

- Le capital initial reste invariable

Calcul des intérêts simples

On emprunte un capital **C_o** pendant **n** périodes au taux **i** par période.

- L'intérêt à payer après la première période est $C_0 i$ et, puisque c'est le capital de départ C_0 qui produit l'intérêt ; l'intérêt à payer après chaque période est $C_0 i$

Calcul des intérêts simples

- L'intérêt total (ou global) à payer (le coût de l'emprunt) est donc :

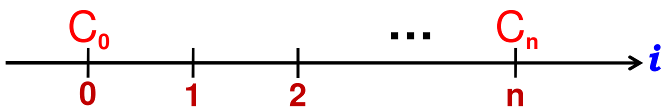
$$C_0 \times i + C_0 \times i + \ldots + C_0 \times i \quad \text{(n fois)}$$

c'est-à-dire: $I_G = C_0 \times n \times i$

- La somme totale à rembourser est donc :

$$C_n = C_0 + C_0 \times n \times i = C_0(1 + ni)$$

A retenir « intérêts simples »



- L'intérêt total à payer (le coût de l'emprunt) est :

$$I_G = C_0 \times n \times i$$

- La somme totale à rembourser (valeur définitive « ou acquise ») du capital C_0 est :

$$C_n = C_0(1+ni)$$

Chapitre II : Intérêts simples

EXERCICES CORRIGES

2. Calcul d'intérêts

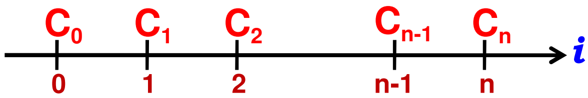
b) Intérêts composés

b) Intérêts Composés

Définition

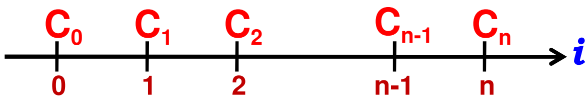
Un capital est placé à intérêts composés, lorsque à la fin de chaque période de placement, l'intérêt simple de cette période est ajouté au capital initial pour produire un intérêt simple à son tour pendant la période suivante

Intérêts Composés



- En intérêts composés, les intérêts sont ajoutés au capital. On dit qu'ils sont capitalisés à la fin de chaque période
- La capitalisation des intérêts est généralement annuelle mais elle peut être semestrielle, trimestrielle, mensuelle ou autre (selon la période)

Valeur définitive (ou valeur acquise)



1) La durée de placement est un nombre entier de périodes :

Si on désigne par :

- C_0 : le capital initial
- n : le nombre de périodes
- i : taux d'intérêt par DH et par période
- C_n : le capital « définitif » acquis à la fin de la $n^{ème}$ période

Le tableau ci-dessous donne

les valeurs acquises en fin de période :

Période	*Capital* *placé en début de période*	*Intérêts* *payés à la fin de chaque période*	*Valeurs acquise* *en fin de période*
1	C_0	$C_0\, i$	$C_1 = C_0 + C_0\, i$ $= C_0\,(1+i)$
2	C_1	$C_1\, i$	$C_2 = C_1 + C_1\, i$ $= C_1\,(1+i)$ $= C_0\,(1+i)^2$
3	C_2	$C_2\, i$	$C_3 = C_2 + C_2\, i$ $= C_2\,(1+i)$ $= C_0\,(1+i)^3$
. . .	. .	. .	. .
n	C_{n-1}	$C_{n-1}\, i$	$C_n = C_{n-1} + C_{n-1}\, i$ $= C_{n-1}\,(1+i)$ $= C_0\,(1+i)^n$

Valeur définitive (ou valeur acquise)

- La formule générale de la valeur définitive ou acquise à intérêts composés est :

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$

- L'intérêt total (ou global) à payer (le coût de l'emprunt) est :

$$I_G = C_0 (1+i)^n - C_0 = C_0 ((1+i)^n - 1)$$

Exemple

Soit un capital C = 10 000 DH placé pendant 3 ans à intérêts composés au taux annuel de 10 %

- On a :

$$C_3 = 10000 \times (1+0{,}1)^3 = 10000 \times 1{,}1^3 = 13310 \text{ DH}$$

Soit un intérêt total :

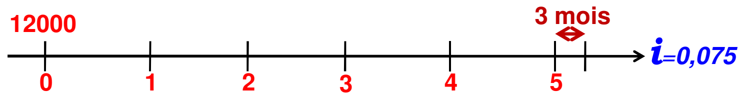
$$I_G = 13310 - 10000 = 3310 \text{ DH}$$

Valeur définitive (ou valeur acquise)

2) La durée de placement est un nombre fractionnaire de périodes :

Exemple

- Quelle est la valeur acquise au bout de 5 ans et 3 mois d'un capital de 12 000 DH placé à intérêts composés au taux annuel de 7,5%



Deux solutions sont possibles :

a) La solution rationnelle

b) La solution commerciale

a) La solution rationnelle

Dans ce cas, on considère que la valeur acquise au bout de 5 ans « C_5 » reste placée à intérêts simples pendant 3 mois

Ce qui donne : $C_{5+3/12} = C_5 + C_5 \times \frac{3}{12} \times 0{,}075$

Comme $C_5 = 12000 \times 1{,}075^5 = 17227{,}55$, on obtient avec la solution rationnelle :

$$C_{5+3/12} = 17550{,}57 \text{ DH}$$

b) La solution commerciale

Dans la pratique, on généralise la formule des intérêts composés au cas où **n** « **n** est le nombre de périodes !!) <u>n'est pas un nombre entier</u> de périodes :

- $C_n = C_0(1+i)^n$: même si **n** n'est pas entier

b) La solution commerciale

Dans notre exemple, avec la solution commerciale on obtient :

$$C_{5+3/12} = 12000 \times 1{,}075^{5+3/12} = 17541{,}86 \text{ DH}$$

Remarque

- La valeur acquise donnée par la solution commerciale est toujours inférieure à celle donnée par La solution rationnelle

- On adopte toujours la solution commerciale sauf indication contraire.

On dit alors que la capitalisation est continue

Chapitre II : Intérêts composés

EXERCICES CORRIGES

2. Calcul d'intérêts

c) Taux proportionnels & taux équivalents

Taux proportionnels

Définition

Deux taux sont proportionnels lorsque leur rapport est égal au rapport des durées de leurs périodes respectives

Exemple : Au taux annuel de **10%** correspond le taux semestriel « proportionnel » de **5%** et le taux trimestriel « proportionnel » de **2,5%**

En effet : **10** / **5** = **1 année** / **1 semestre = 2**
et **10** / **2,5** = **1 année** / **1 trimestre = 4**

Taux proportionnels

- En intérêts simples, deux taux proportionnels produisent sur un même capital les mêmes intérêts au bout du même temps

Exemple

Calculons l'intérêt simple produit par un capital de 10 000 DH placé pendant un an au taux annuel de 10%

période	Taux	Durée de placement	Valeur acquise
1 année	10%	1 an	$10000(1+0,1\times1)=11000$
1 semestre	5%	2 semestres	$10000\ (1+0,05\times2)=11000$
1 trimestre	2,5%	4 trimestres	$10000\ (1+0,025\times4)=11000$

Dans tous les cas, la valeur acquise est la même, une fois que l'on utilise les taux proportionnels

➢ *Mais il n'en est pas de même dans le système des intérêts composés. Reprenons l'exemple précédent et utilisons les intérêts composés :*

période	Taux	Durée de placement	Valeur acquise
1 année	10%	1 an	$10000 \times (1+0,1) = 11000$
1 semestre	5%	2 semestres	$10000 \times (1+0,05)^2 = 11025$
1 trimestre	2,5%	4 trimestres	$10000 \times (1+0,025)^4 = 11038,13$

➢ En intérêts composés et à taux proportionnels, les valeurs acquises par un même capital à la **n**ième période ne sont pas les mêmes. La valeur acquise augmente quand les périodes de capitalisation deviennent plus petites,

d'où l'utilisation des taux équivalents

Taux équivalents

Définition

Deux taux sont équivalents lorsque, à intérêts composés, ils aboutissent pour un même capital, à la même valeur acquise pendant la même durée de placement

Exemple

Reprenons l'exemple précédent :

C=10000 DH ; i=10% (taux annuel) ;
durée de placement = 1 année

- Ainsi, au bout d'une année, la valeur acquise est :

$$10000 \times (1+0{,}10)^{1} = 11000$$

Taux équivalents

Si i_s est le taux semestriel équivalent alors :

$$10000 \times (1+0{,}10)^1 = 10000 \times \left(1+i_s\right)^2$$

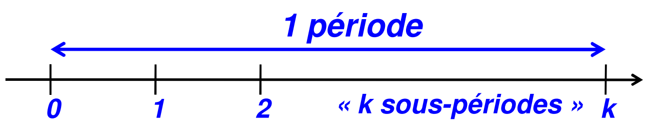
$$1{,}1 = \left(1+i_s\right)^2 \Leftrightarrow 1+i_s = (1{,}1)^{1/2} \Leftrightarrow i_s = (1{,}1)^{1/2} - 1 = 0{,}0488$$

Ainsi, 4,88% est le taux semestriel équivalent au taux annuel de 10 %

RESUME

Taux Proportionnels

(Pour le calcul de la valeur acquise à Intérêts Simples):



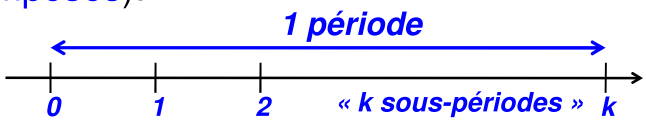
➢ Le taux proportionnel au taux **i** pour une période divisée en k sous-périodes est :

$$C_0(1+ki_k) = C_0(1+i) \Leftrightarrow i_k = \frac{i}{k}$$

RESUME

Taux Équivalents

(Pour le calcul de la valeur acquise à Intérêts Composés):



➢ Le taux équivalent au taux **i** pour une période divisée en **k** sous périodes est :

$$C_0(1+i_k)^k = C_0(1+i) \Leftrightarrow i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

Exemples

1. Quel est le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 9% ?

Si $\mathbf{i_t}$ est le taux trimestriel équivalent alors :

$$(1+i_t)^4 = 1{,}09 \Leftrightarrow i_t = 1{,}09^{1/4} - 1 = 0{,}02177 = 2{,}18\%$$

Soit un taux trimestriel égal à 2,18%

Remarque : taux proportionnel = 9/4 = 2,25%

Exemples

2. Quel est le taux mensuel équivalent au taux semestriel de 6% ?

Si i_m est le taux mensuel équivalent alors :

$$(1+i_m)^6 = 1{,}06 \Leftrightarrow i_m = 1{,}06^{1/6} - 1 = 0{,}00975 = 0{,}97\%$$

Soit un taux mensuel égal à 0,97%

Remarque : taux proportionnel = 6/6 = 1%

Exemples

3. Quel est le taux annuel équivalent au taux mensuel de 1% ?

Si i_a est le taux annuel équivalent alors :

$$(1+i_a)^1 = (1+0{,}01)^{12} \Leftrightarrow i_a = 1{,}01^{12} - 1 = 0{,}12682$$

Soit un taux annuel égal à 12,68%

Remarque :taux proportionnel = **1**x**12** = 12%

Exemples

4. Quel est le taux bimensuel équivalent au taux trimestriel de 3% ?

(dans un semestre : il y a ***2*** *trimestres et* ***3*** *« 2 mois »)*

Si i_b est le taux bimensuel équivalent alors :

$$(1+i_b)^3 = 1{,}03^2 \Leftrightarrow i_b = 1{,}03^{2/3} - 1 = 0{,}01990 = 1{,}99\%$$

Soit un taux bimensuel égal à 1,99%

Remarque : taux proportionnel = 2%

Annexe

Taux moyen de plusieurs placements

« Intérêts simples »

Exemple : soient trois capitaux placés à des taux variables et pendant des durées différentes (en jours, par exemple)

Taux moyen

Capitaux	Taux	Durées
C_1	i_1	j_1
C_2	i_2	J_2
C_3	i_3	j_3

L'intérêt global procuré par ces 3 placements est :

$$I_G = \frac{C_1 i_1 j_1 + C_2 i_2 j_2 + C_3 i_3 j_3}{360}$$

Taux moyen

Définition

« Taux moyen »

Le taux moyen de ces trois placements est un taux unique noté i_m qui, appliqué à l'ensemble de ces 3 placements donne le même intérêt global

C'est-à-dire : i_m est tel que :

$$I_G = \frac{C_1 i_m j_1 + C_2 i_m j_2 + C_3 i_m j_3}{360}$$

Taux moyen

Donc :

$$C_1 i_1 j_1 + C_2 i_2 j_2 + C_3 i_3 j_3 = i_m \times (C_1 j_1 + C_2 j_2 + C_3 j_3)$$

C'est-à-dire : **i_m** est donné par :

$$i_m = \frac{C_1 i_1 j_1 + C_2 i_2 j_2 + C_3 i_3 j_3}{C_1 j_1 + C_2 j_2 + C_3 j_3}$$

D'une manière générale : $i_m = \frac{\sum_k C_k i_k j_k}{\sum_k C_k j_k}$

Chapitre II :

Taux proportionnels, Taux équivalents, Taux moyen

EXERCICES CORRIGES

2. Calcul d'intérêts

d) Escompte commercial

&

Équivalence de capitaux

« à intérêts simples »

1. Effet de commerce

Définition

C'est un instrument de crédit. Il représente une dette à payer.

Vocabulaire

L'effet de commerce prend la forme :

- D'une traite (on dit aussi lettre de change) s'il est rédigé par le créancier (on dit aussi le bénéficiaire ou le tireur)
- D'un billet à ordre (on dit aussi bon de caisse) s'il est rédigé par le débiteur (on dit aussi le payeur ou le tiré)

Remarque

Sur un effet de commerce sont indiquées :

1. La valeur nominale de l'effet : c'est le montant inscrit sur l'effet
2. La date d'échéance : c'est le jour convenu pour le paiement de la dette
3. La durée : c'est le nombre de jours, de mois (ou d'années) entre la date d'émission de l'effet et sa date d'échéance

Exemple

Effet de commerce

Valeur nominale : 50000 DH

Date d'échéance : 30/6/2010

Fait à Mohammedia, le 01/01/2010

Durée de cet effet :
du 01 janvier au 30 juin, soit 180 jours

1. Effet de commerce

- *Le bénéficiaire est sensé attendre la date d'échéance pour encaisser son effet, mais : Il peut le vendre avant son échéance. On dit qu'il négocie l'effet avant son encaissement normal : Cette opération est appelée l'escompte*

2. Escompte commercial

Définition

« *Escompte commercial d'un effet* »

C'est une opération bancaire qui consiste à payer au bénéficière d'un effet la valeur escomptée de l'effet contre sa valeur nominale avant l'échéance

Remarque

$$V.N \geq V.E$$

(*Valeur nominale de l'effet*) (*Valeur escomptée de l'effet*)

- *La différence entre les deux porte le nom de l'escompte :*

$$E = V.N - V.E$$

2. Escompte commercial

Définition

« Escompte »

L'escompte est l'intérêt retenu par la banque sur la valeur nominale de l'effet pendant le temps qui s'écoule depuis le jour de la remise à l'escompte jusqu'au jour de l'échéance

Formules

Si on désigne par :

C : la valeur nominale de l'effet « V.N. »
i : le taux de l'escompte
J : la durée de l'escompte en jours (par exemple)
E : la valeur de l'escompte
VE (notée aussi C_0) : la valeur escomptée

Formules

Alors :

$$E = \frac{C \times i \times J}{360}$$

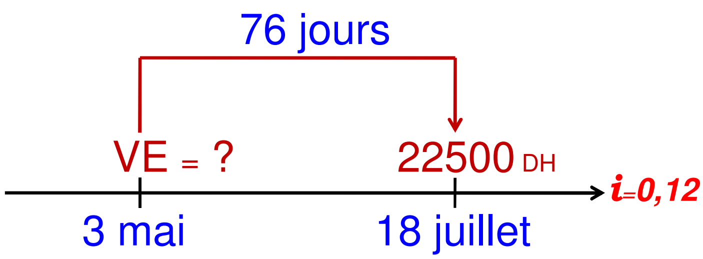
il s'agit d'un intérêt perçu par la banque, et

$$VE = C - E = C - \frac{C \times i \times J}{360} = C\left(1 - \frac{i \times j}{360}\right)$$

Exemple

- Un fournisseur négocie le 03 mai un effet d'un montant de 22500 DH dont l'échéance est le 18 juillet de la même année. La banque escompte l'effet à un taux de 12%.

Quelle est la valeur escomptée de cet effet à la date du 03 mai ?



- Escompte : $E = \frac{22500 \times 12 \times 76}{36000} = 570 \text{DH}$
- Valeur escomptée :

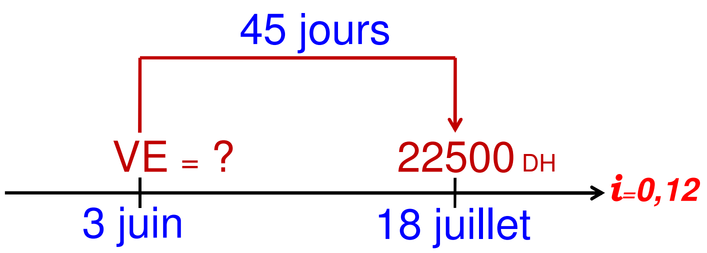
  VE = 22500 – 570 = 21930 DH

  (à la date du 03 mai)

Dans un escompte, la valeur escomptée est appelée valeur actuelle

Dans cet exemple, 21 930 DH est la valeur actuelle de l'effet au 03 mai, c'est-à-dire 76 jours avant son échéance.

Question : Quelle est la valeur actuelle de cet effet s'il est négocié le 03 juin au lieu du 3 mai ?



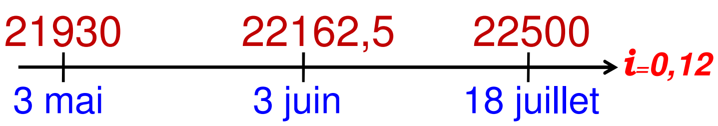
➢ Escompte : $E = \frac{22500 \times 12 \times 45}{36000} = 337{,}50 \text{DH}$

➢ Valeur escomptée :

VE = 22500 – 337,50 = 22 162,50 DH

(à la date du 03 juin)

Ainsi, cet effet dont la valeur nominale est 22 500 DH et à échéance le 18 juillet a pour valeurs actuelles au 03 mai, 03 juin et 18 juillet :



Remarque

➢ à la date d'échéance :

Valeur actuelle = Valeur nominale

3. Équivalence de capitaux « à intérêts simples »

Principe général

➢ De même qu'un créancier peut céder un effet de commerce avant son échéance à une banque, un débiteur peut rembourser une dette avant terme ou repousser son échéance. Puisque la valeur d'une dette est inséparable de la date à laquelle elle est disponible, il suffit pour le créancier et le débiteur de s'entendre sur une date de paiement et sur un taux de calcul pour effectuer l'évaluation de la dette à une date précise

Notion d'actualisation

Soit un capital C disponible à la date 0 :

$C(1-\frac{i\times j}{360})$	C	$C(1+\frac{i\times j}{360})$	
-j	0	+j	i

➢ On peut donc évaluer un capital C à une date quelconque (c'est-à-dire calculer sa valeur actuelle : c'est l'actualisation du capital) en ajoutant l'intérêt ou en retranchant l'escompte

Équivalence de deux effets

Définition

Deux effets sont équivalents à une date donnée, si escomptés au même taux, ils ont la même valeur escomptée (valeur actuelle commerciale). Cette date est la date d'équivalence des deux effets

Formules

Si on désigne par :

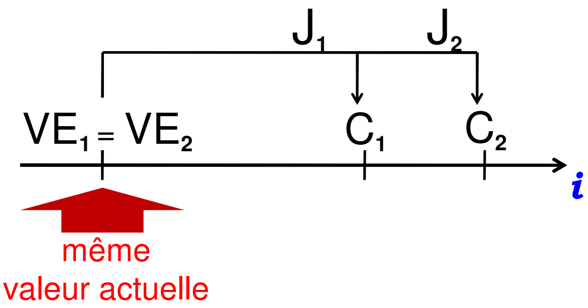
C_1 et C_2 : Valeurs nominales (capitaux)

J_1 et J_2 : Durées d'escompte en jours

i : taux d'escompte

VE_1 et VE_2 : valeurs actuelles

Formules



➢ Nous avons alors l'équation « Équation d'équivalence » suivante :

$$VE_1 = VE_2 \Leftrightarrow C_1\left(1 - \frac{i \times j_1}{360}\right) = C_2\left(1 - \frac{i \times j_2}{360}\right)$$

Problèmes relatifs à l'équivalence

de deux effets (ou de deux capitaux)

➢ Dans la pratique, la notion d'équivalence est utilisée pour remplacer un effet par un autre d'échéance différente. Le problème se ramène donc à déterminer le montant ou la date d'échéance de l'effet de remplacement

A partir de l'équation de base :

$$C_1\left(1-\frac{i\times j_1}{360}\right)=C_2\left(1-\frac{i\times j_2}{360}\right)$$

« Équation d'équivalence des deux effets »

On peut calculer :

- La valeur nominale de l'effet équivalent
- La date d'échéance de l'effet équivalent
- La date d'équivalence
- Le taux d'escompte « **i** »

Chapitre II :

Escompte commercial & Équivalence de capitaux à intérêts simples

EXERCICES CORRIGES

Chapitre 3

Annuités

1. Valeur actuelle

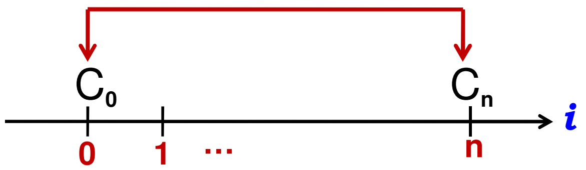
« à intérêts composés »

- On a déjà calculé la valeur acquise à intérêts composés C_n par le placement d'un capital C_o au taux i par période pendant n périodes :

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

1. Valeur actuelle

« à intérêts composés »



Or $C_n = C_0(1+i)^n \Leftrightarrow C_0 = C_n(1+i)^{-n}$

- Donc, la valeur actuelle d'un capital C_n
  « placé au taux i par période pendant n périodes »
  est :

$$C_0 = C_n(1+i)^{-n}$$

Exemples

1. Une personne désire disposer dans 15 ans de 80 000 DH. Quelle somme doit-elle placer « mtn » au taux 8%

$$C_0 = 80000 \times 1{,}08^{-15} = 25219 \text{DH}$$

- Pour obtenir dans 15 ans 80 000 DH, il faut placer 25219 DH au taux 8%

Exemples

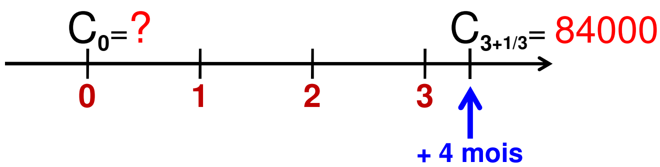
2. Vous voulez disposer de 450 000 DH dans 10 ans. Quelle somme devez-vous placer au taux 1% mensuel ?

$$C_0 = 450000 \times 1{,}01^{-120} = 136347{,}65 \text{DH}$$

➢ Pour obtenir dans 10 ans 450 000 DH, il faut placer 136347,65 DH au taux 1% mensuel

Exemples

3. Une personne désire disposer dans 3 ans et 4 mois de 84000 DH. Quelle somme doit-elle placer au taux 12% ?



$$C_0 = 84000 \times 1{,}12^{-10/3} = 57573{,}05 \text{DH}$$

2. Les annuités

Définition

- On appelle anuité une suite de règlements « versements » effectués à intervalles de temps égaux
- La période est l'intervalle de temps entre deux règlements consécutifs
- Si les versements sont égaux, on parle d'annuité constante

2. Les annuités

Définition

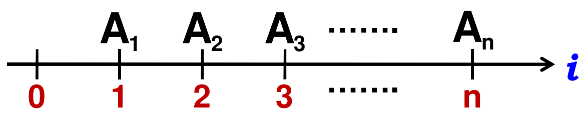
- Si la période est différente de l'année, on parle de semestrialités, mensualités…

Attention

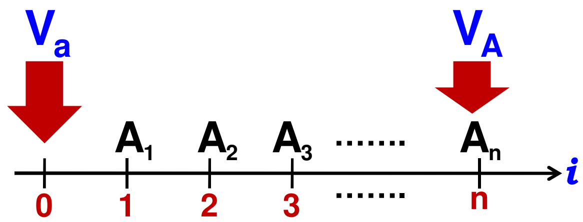
Lorsqu'on parle de semestrialités, mensualités, etc., il faut utiliser les taux d'intérêts équivalents appropriés

2. Les annuités

➢ On considère une suite de n versements A_k effectués aux époques k. Soit i le taux d'intérêt correspondant à la période. Sur un axe de temps, on peut représenter la succession des versements de la manière suivante :



Définition « à retenir »



➢ V_a : est la valeur actuelle de <u>l'ensemble</u> des n versements à <u>la date 0</u>

➢ V_A : est la valeur acquise de <u>l'ensemble</u> des n versements à <u>la date du dernier</u>

a) Valeur acquise
« Constitution d'un capital »

Valeur acquise : Elle se calcule à la date du dernier versement : c'est la somme capitalisée des n versements

Le tableau suivant donne la valeur acquise de chaque versement à la date n :

versements	date	Nombre de périodes restantes	Valeurs acquises
A_1	1	n-1	$A_1\ (1+i)^{n-1}$
A_2	2	n-2	$A_2\ (1+i)^{n-2}$
A_3	3	n-3	$A_3\ (1+i)^{n-3}$
. .	. .	. .	. .
A_k	k	n-k	$A_k\ (1+i)^{n-k}$
. .	. .	. .	. .
A_n	n	0	A_n

a) Valeur acquise

➢ La valeur acquise V_A est donc donnée par :

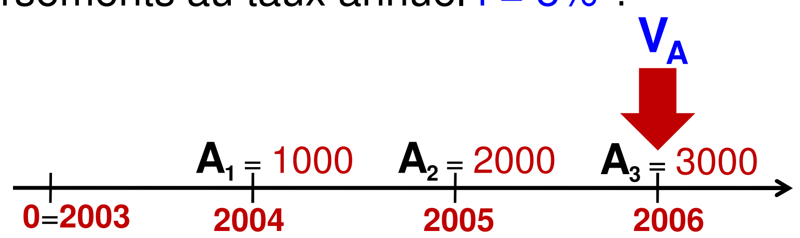
$$V_A = \sum_{k=1}^{n} A_k (1+i)^{n-k}$$

« formule à retenir »

Exemple

On verse 1000 DH le 01/5/2004, puis 2000 DH le 01/5/2005 et 3000 DH le 01/5/2006.

➢ Quelle est la valeur acquise de ces trois versements au taux annuel i = 8% ?



$$V_A = 1000 \times 1{,}08^2 + 2000 \times 1{,}08 + 3000 = 6326{,}40$$

b) Valeur actuelle

« Remboursement d'une dette »

Valeur actuelle : Elle se calcule à la date 0 : c'est la somme actualisée des **n** versements

Le tableau suivant donne la valeur actuelle de chaque versement à la date 0 :

versement	date	Nombre de périodes précédentes	Valeurs actualisées
A_1	1	1	$A_1\,(1+i)^{-1}$
A_2	2	2	$A_2\,(1+i)^{-2}$
A_3	3	3	$A_3\,(1+i)^{-3}$
. .	. .	. .	. .
A_k	k	k	$A_k\,(1+i)^{-k}$
. .	. .	. .	. .
A_n	n	n	$A_n\,(1+i)^{-n}$

b) Valeur actuelle

➢ La valeur actuelle V_a est donc donnée par :

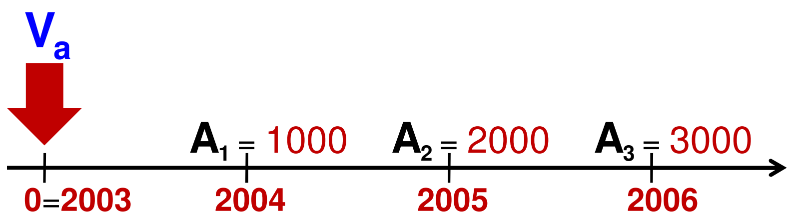
$$V_a = \sum_{k=1}^{n} A_k (1+i)^{-k}$$

« formule à retenir »

Exemple

➢ Calculer la valeur actualisée des trois versements précédents :

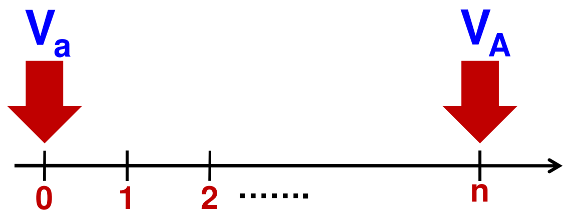
« 1000 DH le 01/5/2004, puis 2000 DH le 01/5/2005 et 3000 DH le 01/5/2006 au taux annuel i = 8% »



$$V_a = 1000 \times 1{,}08^{-1} + 2000 \times 1{,}08^{-2} + 3000 \times 1{,}08^{-3}$$

C'est-à-dire : $V_a = 5022{,}1 \text{DH}$

Remarque



On vérifie que :

$$V_a = V_A (1+i)^{-n} \quad \text{et} \quad V_A = V_a (1+i)^{n}$$

Dans notre exemple :

$$V_a = 5022{,}1 = 6326{,}4 \times 1{,}08^{-3}$$

3. Cas particulier « annuités constantes »

- Quelque soit k, $A_k = a$, on a alors :

$$V_A = \sum_{k=1}^{n} A_k (1+i)^{n-k} = a \times \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k}$$

$$= a \times (1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-1})$$

$$= a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- De même, pour le calcul de la valeur actuelle

$$V_a = \sum_{k=1}^{n} A_k (1+i)^{-k} = a \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k}$$

$$= a(\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n) \text{ avec } \alpha = (1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i}$$

$$= a\alpha(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1})$$

$$= a\alpha \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$$, on remplace α par sa

Valeur et on obtient : $\boxed{V_a = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$

Remarque

On peut calculer la valeur actuelle directement à partir de la valeur acquise calculée précédemment :

$$V_a = V_A \times (1+i)^{-n} = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)^{-n}$$

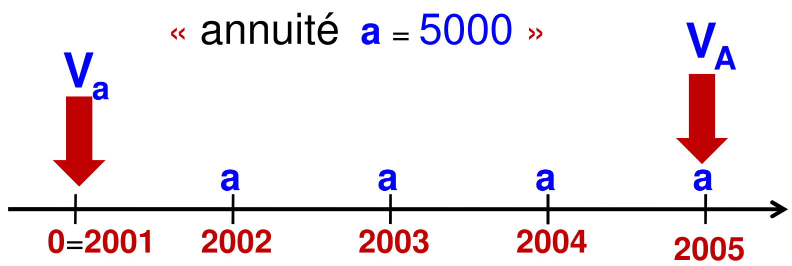
$$= a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Exemple

4 annuités constantes de 5000 DH sont versées périodiquement à partir du premier janvier 2002 au taux annuel 10%

- Calculer leur valeur actuelle et leur valeur acquise

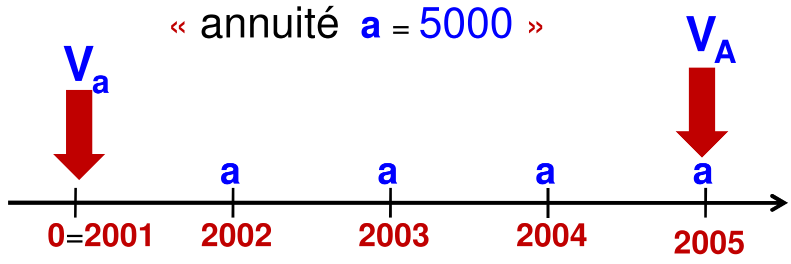
Exemple



- Valeur acquise au 1èr janvier 2005 :

$$V_A = 5000 \times \frac{1{,}1^4 - 1}{0{,}1} = 23205 \text{DH}$$

Exemple



➢ Valeur actuelle au 1èr janvier 2001 :

$$V_a = 5000 \times \frac{1-1{,}1^{-4}}{0{,}1} = 15849{,}33\,\text{DH}$$

4. Remboursement d'une dette

➢ Une personne emprunte une somme d'argent C a un taux d'intérêt i qu'elle désire rembourser au moyen de n versements périodiques A_k (ici on traite <u>la cas général</u>)

Les versements se font <u>une période après la date de l'emprunt</u>

4. Remboursement d'une dette

a) Valeur actuelle : la valeur actuelle des n versements doit être égale au montant de l'emprunt C.

- On doit donc avoir :

$$C = \sum_{k=1}^{n} A_k (1+i)^{-k}$$

« formule à retenir »

4. Remboursement d'une dette

- Si les remboursements sont constants de valeur a, on a :

$$C = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

4. Remboursement d'une dette

b) Valeur acquise : la valeur acquise des n versements doit être égale a la valeur acquise de l'emprunt C.

- On doit donc avoir :

$$C\times(1+i)^{n}=\sum_{k=1}^{n}A_k(1+i)^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow C=\sum_{k=1}^{n}A_k(1+i)^{-k}$$

4. Remboursement d'une dette

- Si les remboursements sont constants de valeur a, on a :

$$C(1+i)^{n}=a\times\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\Leftrightarrow C=a\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Montant des annuités constantes de remboursement

- Si l'on connaît le montant de l'emprunt C, le taux d'intérêt **i** et le nombre de remboursements **n**, on peut déterminer le montant a des remboursements s'ils sont constants :

$$C = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Leftrightarrow a = C \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Exemple

Une personne contracte un emprunt d'un montant 100 000 DH et elle souhaite le rembourser en 12 versements égaux au taux d'intérêt 13%.

- Calculer le montant de ces remboursements

- Le montant des remboursements est donné par :

$$a = 100000 \frac{0{,}13}{1-1{,}13^{-12}} = 16898{,}61 \text{DH}$$

Exemple

- Quel est le coût de cet emprunt ?
- La personne a emprunté $100\,000$ DH

et doit rembourser $12 \times 16898{,}61 = 202783{,}30$

Le coût de l'emprunt est donc égal à :

$$202783{,}30 - 100000 = 102783{,}30 \quad !!$$

Remarquer que dans cet exemple, le coût de l'emprunt est supérieur à son montant

Chapitre III : Annuités

EXERCICES CORRIGES

Chapitre 4

Les emprunts Indivis

Emprunts indivis

Définition

Un emprunt indivis est un emprunt contracté auprès d'un seul prêteur. Il est remboursé périodiquement.

Emprunts indivis

- On supposera que les remboursements se font en fin de période

- Le prêteur peut mettre à la disposition de l'emprunteur la somme convenue en une ou plusieurs fois

Emprunts indivis

- Les remboursements différés ou anticipés sont possibles, moyennant ou non des frais supplémentaires

- A chaque paiement, le montant des intérêts est calculé sur le capital restant à rembourser

1. Amortissement

Lors de chaque annuité (remboursement), on fait la part entre :

- La somme qui participe au remboursement du capital emprunté
- La somme qui participe au remboursement de l' intérêt

1. Amortissement

- La somme qui participe au remboursement du capital emprunté s'appelle l' amortissement

1. Amortissement

Si A_p est l'annuité de la période p, c'est-à-dire le montant payé à la fin de la période p, on a :

$$A_p = I_p + M_p$$

avec :

- I_p est l'intérêt crée pendant la période p et remboursé en fin de cette période
- M_p est l'amortissement de la période p

2. Tableau d'amortissement

- On emprunte un capital D_0 au taux d'intérêt i (par période) et on rembourse à la fin de chacune des n périodes

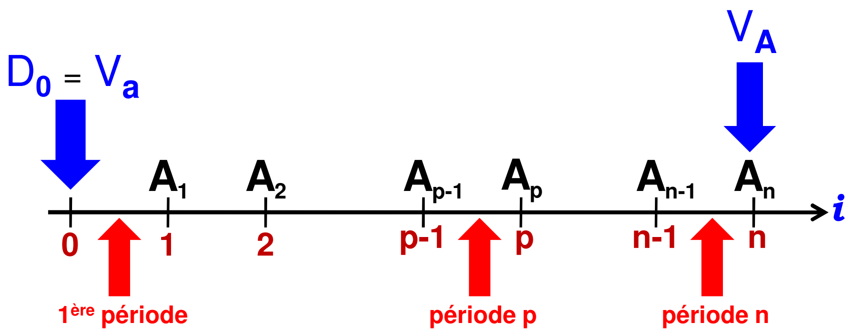
Remarque : D_0 pour dire «dette à la date 0»

Notations

- En début de période p, le dette restante est noté D_{p-1}
- L'annuité payée en fin de la période p est notée A_p
- L'intérêt payé en fin de la période p est noté I_p
- L'amortissement payé en fin de la période p est noté M_p

Schéma

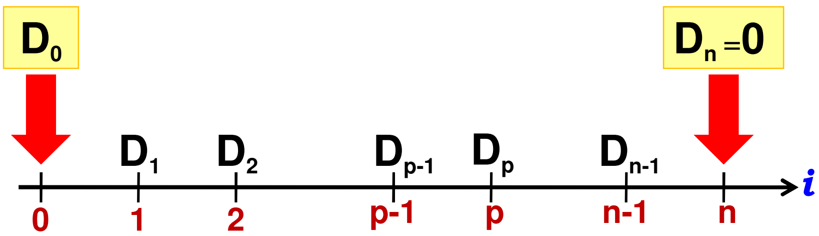
« annuités en fin de période »



- Les remboursements (annuités) se font en fin de période

Schéma

« Dette restante »



- À la date 0, le montant de la dette restante est égal au montant de l'emprunt
- À la date n, après le dernier versement, la dette restante est égale à 0

Règles de base

a) A chaque début de période p, on a une dette D_{p-1} : c'est la somme restante due

- Cette somme crée un intérêt $I_p = D_{p-1}\, i$ pendant la période p

b) A la fin de la période p, on rembourse l'annuité A_p qui paye l'intérêt I_p et contribue au remboursement de la dette :

$$A_p = I_p + M_p$$

Règles de base

La dette de début de période p+1 est alors :

$$D_p = D_{p-1} - M_p$$

- La dette en fin de la dernière période «début de la période n+1» doit être totalement payée donc :

$$D_n = D_{n-1} - M_n = 0$$

On résume la situation par période dans un tableau appelé tableau d'amortissement :

Période	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	D_0	$I_1 = D_0\, i$	M_1	$A_1 = I_1 + M_1$
2	$D_1 = D_0 - M_1$	$I_2 = D_1\, i$	M_2	$A_2 = I_2 + M_2$
3	$D_2 = D_1 - M_2$	$I_3 = D_2\, i$	M_3	$A_3 = I_3 + M_3$
. . .				
p	$D_{p-1} = D_{p-2} - M_{p-1}$	$I_p = D_{p-1}\, i$	M_p	$A_p = I_p + M_p$
. . .				
n	$D_{n-1} = D_{n-2} - M_{n-1}$	$I_n = D_{n-1}\, i$	M_n	$A_n = I_n + M_n$

Remarques

1. Coût de l'emprunt

- La somme totale remboursée est la somme de toutes les annuités (versements) :

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

- La somme empruntée au début est D_0

Le coût de l'emprunt est donc :

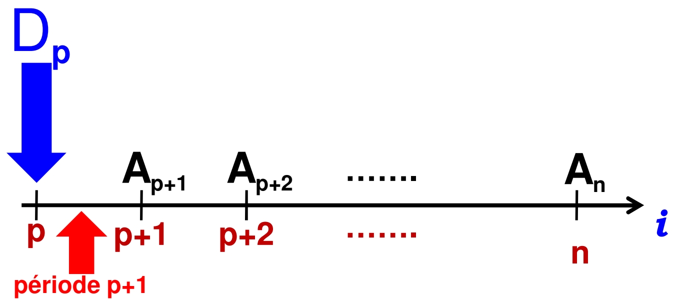
$$C = A_1 + A_2 + \ldots + A_n - D_0$$

Remarques

2. Somme restante à payer

- La somme qui reste à payer début de la période p+1 est la valeur actuelle des n-p annuités restantes (c'est-à-dire la somme qui va être remboursée par les n-p annuités restantes, intérêts compris)

Somme restante à payer



➢ On a donc (chapitre précédent «Annuités») :

$$D_p = \sum_{k=p+1}^{n} A_k (1+i)^{p-k}$$

Remarques

3. Somme empruntée

➢ En particulier, la somme due en début de la première période, D_0, est la somme empruntée

$$p=0$$

$$D_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k (1+i)^{-k}$$

Remarques

A retenir

- Lors d'un emprunt sur n périodes, au taux i par période, en remboursant A_k à la période k ($k=1, 2, \ldots, n$), on peut emprunter D_0 avec :

$$D_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k (1+i)^{-k}$$

Remarques

4. Amortissement

- On peut relier l'amortissement d'une période à l'amortissement de la période précédente :

$$M_{p+1} = (1+i) M_p + A_{p+1} - A_p$$

« formule à retenir »

Preuve

On a :

$$A_{p+1}=I_{p+1}+M_{p+1} \quad ; \quad A_p=I_p+M_p$$

avec : $I_{p+1}=D_p \times i$ et $I_p=D_{p-1} \times i$

donc

$$A_{p+1}-A_p=D_p \times i-D_{p-1} \times i+M_{p+1}-M_p$$

$$=(D_p-D_{p-1}) \times i+M_{p+1}-M_p$$

Preuve

Or : $D_p=D_{p-1}-M_p \Rightarrow D_p-D_{p-1}=-M_p$

On obtient :

$$A_{p+1}-A_p=-M_p \times i+M_{p+1}-M_p$$

$$=-(1+i)M_p+M_{p+1}$$

Ainsi : $M_{p+1}=(1+i)M_p+A_{p+1}-A_p$

3. Le cas particulier des annuités constantes

1. Somme empruntée

Lors d'un emprunt sur n périodes, au taux i par période, en remboursant a par période, on peut emprunter D_0 avec :

$$D_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

3. Le cas particulier des annuités constantes

2. Valeur de l'annuité

Lors d'un emprunt « d'un montant D_0 » sur n périodes, au taux i par période, quelle annuité doit-on payer (remboursement par annuités constantes) ?

$$a = D_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

3. Le cas particulier des annuités constantes

3. Somme restante à payer

Nous avons vu précédemment dans le cas général que : $D_p = \sum_{k=p+1}^{n} A_k (1+i)^{p-k}$

donc, si les annuités sont constantes de valeur commune a : $D_p = a \sum_{k=p+1}^{n} (1+i)^{p-k}$

Somme restante à payer

C'est-à-dire :

$$D_p = a(\alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{n-p}) \text{ avec } \alpha = (1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i}$$

$$= a\alpha(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{n-p-1})$$

$$= a\alpha \frac{\alpha^{n-p} - 1}{\alpha - 1}$$, on remplace α par sa valeur et on obtient : $D_p = a \times \frac{1-(1+i)^{p-n}}{i}$

Somme restante à payer

A retenir

➢ Lors d'un emprunt sur n périodes, au taux i par période, en remboursant a par période, la dette restante début de la période p+1 (p=0,1,…, n) est donnée par :

$$D_p = a \times \frac{1-(1+i)^{p-n}}{i}$$

Remarque

➢ Dans la cas p=0, on retrouve la formule ci-dessus donnant le montant de l'emprunt :

$$D_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

➢ Dans la cas p=n, on retrouve la règle de base ci-dessus :

$$D_n = 0$$

Somme restante à payer

«en fonction de la somme empruntée »

- On a :

$$D_p = a \times \frac{1-(1+i)^{p-n}}{i} \quad \text{et} \quad a = D_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

On remplace a par sa valeur et on obtient :

$$D_p = D_0 \times \frac{1-(1+i)^{p-n}}{1-(1+i)^{-n}}$$

Somme restante à payer

A retenir

Lors d'un emprunt de D_0, pendant n périodes, au taux i par période, la dette restante début de la période p+1 (p=0,1,…, n) (c'est-à-dire la dette après paiement de l'annuité de la période p) est :

$$D_p = D_0 \times \frac{1-(1+i)^{p-n}}{1-(1+i)^{-n}} = D_0 \times \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

3. Le cas particulier des annuités constantes

4. Amortissement

Dans le cas général, nous avons vu la relation :

$$M_{p+1} = (1+i)M_p + A_{p+1} - A_p$$

Dans le cas particulier des annuités constantes, on a : $A_{p+1} = A_p \Rightarrow M_{p+1} = (1+i)M_p$

A retenir

- Dans un emprunt par annuités constantes, les amortissements sont en progression géométrique de raison $1+i$:

$$M_{p+1} = (1+i)M_p$$

3. Le cas particulier des annuités constantes

4. Amortissement

Le premier amortissement est :

$$M_1 = A_1 - I_1 = a - D_0 i$$

Or $a = D_0 \times \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$, donc : $M_1 = D_0 \times \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

3. Le cas particulier des annuités constantes

4. Amortissement

Et puisque les amortissements sont en progression géométrique de raison $1+i$:

$$M_p = (1+i)^{p-1} M_1$$

On a alors : $M_p = D_0 \times \dfrac{i(1+i)^{p-1}}{(1+i)^n - 1}$

Exemple

On emprunte un capital de 76000 DH au taux annuel 10% pour 5 ans. Les remboursements se font à la fin de chaque année par annuités constantes

Exemple

Le montant de chaque annuité est :

$$a = D_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 76000 \times \frac{0{,}1}{1-1{,}1^{-5}} = 20048{,}61$$

Exemple

- Le capital dû en début de 1èr année est :

$$D_0=76000$$

Pendant la 1èr année, cette somme produit un intérêt, en DH, égal à :

$$I_1=D_0\times i=76000\times 0{,}1=7600$$

Exemple

L'annuité est : A_1=20048,61 DH, de sorte que l'amortissement en DH de cette première année est :

$$M_1=A_1-I_1=20048{,}61-7600=12448{,}61$$

Exemple

- Le capital dû en début de 2ème année est :

$$D_1 = D_0 - M_1 = 76000 - 12448{,}61 = 63551{,}39$$

Pendant la 2ème année, cette somme produit un intérêt, en DH, égal à :

$$I_2 = D_1 \times i = 63551{,}39 \times 0{,}1 = 6355{,}14$$

Exemple

L'annuité est : A_2=20048,61 DH, de sorte que l'amortissement en DH de cette deuxième année est :

$$M_2 = A_2 - I_2 = 20048{,}61 - 6355{,}14 = 13693{,}47$$

En répétant ce qu'on a fait pour la 2ème année, on construit pas-à-pas le tableau :

période	Capital dû en début de période	Intérêts de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	76000	7600	12448,61	20048,61
2	63551,39	6355,14	13693,47	20048,61
3	49857,92	4985,80	15062,82	20048,61
4	34795,10	3479,51	16569,10	20048,61
5	18226	1822,6	18226	20048,61

Méthode rapide

1. Le montant de chaque annuité est obtenu par :

$$a = D_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

On complète la colonne «annuité de la période»

Méthode rapide

2. En utilisant la formule :

$$D_p = a \times \frac{1-(1+i)^{p-n}}{i}$$

On complète la colonne «Capital dû»

Méthode rapide

3. En utilisant la formule :

$$I_p = D_{p-1} \times i$$

On complète la colonne «Intérêts»

Méthode rapide

4. En utilisant la formule :

$$M_p = A_p - I_p = a - I_p$$

On complète la colonne «amortissements»

Remarque

➢ Nous avons traité ici le cas la plus fréquent, celui du remboursement par annuités constantes. D'autres procédures de remboursement seront traités en exercices (voir exercices corrigés) :

- La procédure des amortissements constants
- La procédure du remboursement final avec constitution d'un fonds d'amortissement

A retenir

- La meilleure procédure de remboursement pour un emprunteur est celle dont le coût de l'emprunt (somme des intérêts : somme de la colonne intérêts du tableau d'amortissement) est le plus faible

Chapitre IV : Emprunts Indivis

EXERCICES CORRIGES